

基于 L 型阵列的方位估计及互耦自校正算法研究

吴 彪¹, 陈 辉¹, 杨春华²

(1. 空军雷达学院雷达兵器运用工程军队重点实验室, 湖北武汉 430010; 2. 中国船舶重工集团第 723 研究所, 江苏扬州 225001)

摘 要: 针对 L 型阵, 提出了一种互耦自校正算法 (SAL: self-calibration algorithm for L-shaped array). 该算法利用 L 型阵列特殊的互耦特性, 实现了对信源信息 (DOA) 和阵列互耦系数的解耦合, 从而无需任何校正源就可以实现两类参数的估计. 与基于循环迭代最小化技术的传统自校正算法相比, 该算法先通过搜索谱峰估计信源信息 (DOA), 再估计互耦系数, 从而避免了多维搜索带来的庞大运算量和迭代中的全局收敛性问题. 仿真结果表明本文提出的自校正算法具有精度高、计算量小的特点.

关键词: L 型阵列; DOA 估计; 互耦; 自校正

中图分类号: TN957.51 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 06-1316-07

Study of DOA Estimation and Self-Calibration Algorithm for L-Shaped Array in the Presence of Mutual Coupling

WU Biao¹, CHEN Hui¹, YANG Chun-hua²

(1. Key Research Lab, Radar Academy, Wuhan, Hubei 430010, China; 2. The 723 Institute of CSIS, Yangzhou, Jinansu 225001, China)

Abstract: A self-calibration algorithm (SAL: self-calibration algorithm for L-shaped array) is presented for L-shaped array in the presence of mutual coupling. The proposed algorithm utilizes special mutual coupling characteristic of L-shaped array to decouple the signal source information (DOA) and coupling coefficients of antenna array so that two kinds of parameter estimations can be realized without any calibration sources. It not only calibrates mutual coupling inside sub-arrays, but also calibrates mutual coupling between sub-arrays. Compared with conventional self-calibration algorithm based on iterative alternating minimization technique, the proposed algorithm transforms joint estimation problem about DOA and mutual coupling coefficients into cascaded estimation problem, which means that we firstly estimate DOA by searching spectrum peak, and then estimate coupling coefficients so as to avoid huge computation because of multi-dimensional search and global convergence problem due to iterative. Simulation results demonstrate that the proposed self-calibration algorithm is characteristic of high accuracy and little computation.

Key words: L-shaped array; DOA estimation; mutual coupling; self-calibration

1 引言

目前,大量的 DOA 估计算法都是基于均匀线阵提出的,但均匀线阵的最大缺点是只能提供 0° 到 180° 范围内的估计,且只能提供一维角信息;圆阵虽然可以提供 0° 到 360° 范围内恒定分辨率的二维角信源信息,但其分辨率较低,且 CRB 较大;面阵所用的阵元数较多,计算量较大,结构比较复杂;L 型阵具有均匀线阵和平面阵的特点,结构简单,而且对于均匀线阵的研究成果可用于 L 型阵.相对于十字型阵,L 型阵的 CRB 小 37%,且具有更高的估计精度^[1],因此 L 型阵越来越受到人们的重

视.文献[1~3]提出了利用 L 型阵列进行 DOA 估计的算法,但这些算法均没有考虑 L 型阵列的误差影响,特别是互耦的影响.由文献[4]可知互耦会导致特征分解类算法的性能急剧下降甚至失效,其补偿与校正较为复杂.

文献[5~7]利用矩量法计算出了天线阵列的互耦矩阵,并推导了互耦矩阵的解析表达式.此类方法的缺点是电流分布的计算比较复杂,当阵列周围环境改变时,必须重新计算电流分布,不能满足实时计算的要求.文献[8]和文献[9]中的自校正类算法可以弥补上述缺陷.此类算法将阵列互耦的校正和补偿转化为一个阵列

互耦参数的估计问题,使得阵列的互耦系数与感兴趣的信源参数同时在线估计,无需方位已知的信源,且校正精度比较高.但这类方法往往运算量大,并且全局收敛性往往无法得到保证,因此这种方法的容许度较小.文献[10]通过设置适量的辅助阵元实现了阵列互耦的自校正,且避免了迭代带来的种种问题.然而这种算法是针对 ULA 提出的,是否可用于 L 型阵列还有待研究.本文在文献[11]的基础上,提出了 L 型阵列互耦条件下的 DOA 估计及互耦自校正算法.该算法把 DOA 和互耦系数联合估计问题转化为级联估计问题,即先估计信源信息(DOA),再估计互耦系数,从而避免了多维搜索带来的庞大运算量和迭代中的全局收敛性问题,从而解决了 L 型阵列的互耦问题.

2 阵列结构与数据模型

2.1 阵列结构

L 型阵列由两个均匀线阵组成,夹角为 120° ,端点处共用一个阵元.阵列可以水平放置,也可以垂直放置,图 1 所示的阵列结构图给出了水平放置的情况.为了方便分析,假设公共阵元位于原点处,阵列位于 xoy 平面上,其中一个线阵位于 x 轴,另一个线阵与 x 轴正方向的夹角为 120° .*

假设原点 O 为参考点,入射信号为窄带远场信号,方位角和俯仰角分别为 θ 和 φ .设 x 轴上线阵阵元数为 M_1 ,阵元间距为 d_1 ;另一个线阵阵元数为 M_2 ,阵元间距为 d_2 ,则总阵元数 $M = M_1 + M_2$.为了保证信号不模糊,阵元间距应当满足 $d_1, d_2 \leq \lambda/2$, λ 为信号波长.设阵元坐标为 (x_k, y_k) ($k = 1, 2, \dots, M_1 + M_2$),则第 k 个阵元相对于参考阵元的相位差为:

$$\beta_k = 2\pi(x_k \cos\theta \cos\varphi + y_k \sin\theta \cos\varphi) / \lambda \quad (1)$$

其中 x_k 和 y_k 分别由下式给出

$$x_k = \begin{cases} (k-1)d_1 & 1 \leq k \leq M_1 \\ -0.5(k-M_1-1)d_1 & M_1+1 \leq k \leq M_1+M_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$y_k = \begin{cases} 0 & 1 \leq k \leq M_1 \\ 0.5\sqrt{3}(k-M_1-1)d_2 & M_1+1 \leq k \leq M_1+M_2 \end{cases} \quad (3)$$

则导向矢量表示为:

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = [1, e^{-j\beta_2}, \dots, e^{-j\beta_{M_1}}, 1, e^{-j\beta_{M_1+2}}, \dots, e^{-j\beta_{M_1+M_2}}]^T \quad (4)$$

2.2 数据模型

方便分析,假设 $d_1 = d_2 = d = \lambda/2$, $M_1 = M_2 = M$,则总阵元数为 $2M$.以原点处的阵元为参考阵元,则阵列接收的快拍矢量可表示为**:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{CA}(\theta, \varphi)\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t), t = 1, 2, \dots, K \quad (5)$$

式中, $\mathbf{X}(t)$ 为 $2M \times 1$ 维快拍数据矢量; $\mathbf{A}(\theta, \varphi)$ 为无误差时的阵列流型矩阵,满足无秩 $2M-1$ 模糊; $\mathbf{S}(t)$ 为信源矢量; $\mathbf{N}(t)$ 为 $2M \times 1$ 维零均值加性高斯白噪声矢量; K 为快拍数. \mathbf{C} 为 $2M \times 2M$ 维阵列互耦矩阵,表示为:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中, \mathbf{D} 为阵 $M \times M$ 维线阵内的互耦矩阵, \mathbf{B} 为 $M \times M$ 维线阵间的互耦矩阵.理想情况下,阵列流型 \mathbf{A} 反映的是阵列在信号方向的空间响应.互耦存在时, \mathbf{A} 不能反映阵列在信号方向的真实空间响应,导致估计性能的下陷甚至失效.某些互耦系数还会使某一方向的导向矢量是其他几个方向导向矢量的线性组合,从而产生伪峰^[10].

由文献[11]可知线阵内的互耦矩阵可以表示为:

$$\begin{cases} D_{i,j} = D_{1,|i-j|+1}, & D_{i,j} = 0 & |i-j| > p_1 \\ D_{i,j} = D_{j,i}, & D_{i,i} = 1 & i = j \end{cases} \quad (7)$$

其中 D_{ij} 是互耦矩阵 \mathbf{D} 的第 i 行,第 j 列元素, $p_1 = (p-1)d$, 为线阵内互耦临界值,当阵元间距大于这一值时,阵元间的互耦近似为零, p 为线阵内的互耦自由度,表示 \mathbf{D} 中第一行非零元素的个数.所以,线阵内的互耦矩阵可以由首 1 的 p 维矢量唯一表征^[11].

矩阵 \mathbf{B} 具有对称性,但不具有 Toeplitz 性.其中第 i 行,第 j 列元素 B_{ij} 可用下式描述:

$$\begin{cases} B_{1,j} = D_{1,j}, & B_{i,1} = D_{i,1} \\ B_{i,j} = 0, & d_{ij} > p_2 \\ B_{i,j} = B_{j,i} \end{cases} \quad (8)$$

式中, d_{ij} 为第 i 个阵元与第 j 个阵元的距离, p_2 , 为线阵间互耦临界值(其含义与 p_1 类似),这里假设线阵内互耦与线阵间互耦效果相同,即假设 $p_2 = p_1$, $D_{1,j}$ 表示 1 号阵元与 x 轴上阵元的互耦系数(线阵内互耦), $B_{1,j}$ 表示 1 号阵元与另一个线阵的互耦系数(线阵间互耦).

阵列接收数据的协方差矩阵可表示为:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] = \mathbf{CAR}_S\mathbf{A}^H\mathbf{C}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{R}_S = E[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)]$ 为信源的协方差矩阵, \mathbf{I} 为

* 原点为 1 号阵元,沿 x 轴正向依次编号至 M_1 , M_1+1 号阵元与 1 号阵元重合,并依次编号至 M_1+M_2

** 为了方便分析,原点处的阵元计算了两边,即 $\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_M(t), \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_{M+2}(t), \dots, \mathbf{x}_{2M}(t)]^T$

单位矩阵, σ 为噪声功率。

由子空间理论的知识可知互耦存在时的 MUSIC 算法为

$$P_{MUSIC}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\|(\mathbf{CA}(\theta, \varphi))^H \mathbf{E}_N\|^2} \quad (10)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 Frobenius 范数, H 表示共轭转置, \mathbf{E}_N 为存在互耦时的噪声子空间。

3 L 型阵互耦自校正算法

3.1 算法原理

设 \mathbf{D} 中的非零元素为 $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_p]^T$; \mathbf{B} 中异于 \mathbf{D} 的非零元素个数为 \bar{p} (其值没有明显规律, 只能根据具体阵列结构确定), 记为 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_{\bar{p}}]^T$, 互耦矢量 $\mathbf{c} = [\mathbf{d}^T \quad \mathbf{b}^T]^T$. 由上节知识可知, 用联合的方法进行搜索时, 维数由不存在互耦时的二维变为 $2(p + \bar{p} + N - 1)$ 维, 计算量太大, 不利于工程实现。

对于无误差时的导向矢量 $\mathbf{a}(\theta, \varphi)$, 可以分为:

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = [\mathbf{a}_1^T(\theta, \varphi), \mathbf{a}_2^T(\theta, \varphi)]^T \quad (11)$$

$$\text{其中, } \mathbf{a}_1(\theta, \varphi) = [1, e^{-j\beta_2}, \dots, e^{-j\beta_M}]^T \quad (12)$$

$$\mathbf{a}_2(\theta, \varphi) = [1, e^{-j\beta_{M+2}}, \dots, e^{-j\beta_{M+M}}]^T \quad (13)$$

由式(6)可得存在互耦时的导向矢量

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta, \varphi, \mathbf{c}) &= \mathbf{C}\mathbf{a}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\theta, \varphi) \\ \mathbf{a}_2(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}\mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{B}\mathbf{a}_2(\theta, \varphi) \\ \mathbf{B}\mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{D}\mathbf{a}_2(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

由于 \mathbf{D} 为带状、对称的 Toeplitz 矩阵, 所以通过矩阵运算可表示为

$$\mathbf{D}\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi) = \mathbf{T}_1[\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)]\bar{\mathbf{c}} \quad (15)$$

式中, $\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi) = [\mathbf{a}_1(\theta, \varphi), \mathbf{a}_2(\theta, \varphi)]$, $\bar{\mathbf{c}} = [\mathbf{d}, \mathbf{b}]$, $\mathbf{T}_1[\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)]$ 为 $M \times p$ 维的重构矩阵, 可表示为:

$$\mathbf{T}_1[\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)] = \mathbf{T}_a[\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)] + \mathbf{T}_b[\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)] \quad (16)$$

$$[\mathbf{T}_a]_{i,j} = \begin{cases} \bar{a}_{\theta, \varphi}(i+j-1) & i+j \leq M+1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (17)$$

$$[\mathbf{T}_b]_{i,j} = \begin{cases} \bar{a}_{\theta, \varphi}(i-j+1) & i \geq j \geq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (18)$$

线阵间的互耦矩阵 \mathbf{B} 为对称矩阵, 分为两部分, 即 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, 其中 \mathbf{B}_1 为含有 \mathbf{D} 中元素的部分, \mathbf{B}_2 为异于 \mathbf{D} 中元素的部分. 则:

$$\mathbf{B}\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi) = \mathbf{B}_1\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi) + \mathbf{B}_2\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi) \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{B}_1\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi) = \mathbf{T}_2[\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)]\bar{\mathbf{c}} \quad (20)$$

式中, $\mathbf{T}_2[\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)]$ 也为一个 $M \times p$ 的重构矩阵, 具体表示为

$$[\mathbf{T}_2]_{i,j} = \begin{cases} \bar{a}_{\theta, \varphi}(j) & , i=1 \\ \bar{a}_{\theta, \varphi}(1) & , i=j \\ 0 & , \text{其他} \end{cases} \quad (21)$$

\mathbf{B}_2 也是一个对称矩阵, 其中第一行和第一列均为 0. 由于它的结构和非零元素个数都没有明显规律, 所以只能根据 L 型阵列结构、 p 和 \bar{p} 值具体分析. 下面给出 $p=2, 3, 4, 5$ 时 \mathbf{B}_2 的矩阵结构及对应的重构矩阵 \mathbf{T}_3 . 设 $\mathbf{B}_2\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi) = \mathbf{T}_3[\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)]\bar{\mathbf{c}}$, $\mathbf{T}_3[\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)]$ 的维数为 $M \times \bar{p}$.

设 $[\mathbf{B}_2]_{p \times p}$ 为 \mathbf{B}_2 的前 p 行和前 p 列组成的矩阵, $[\mathbf{T}_3]_{p \times \bar{p}}$ 表示 \mathbf{T}_3 的前 p 行组成的矩阵, 其余元素为 0, 不表示出来。

$p=2$ 时, $\bar{p}=0$, 则:

$$[\mathbf{B}_2]_{p \times p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{T}_3]_{p \times \bar{p}} = 0 \quad (22)$$

$p=3$ 时, $\bar{p}=1$, 则:

$$[\mathbf{B}_2]_{p \times p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[\mathbf{T}_3]_{p \times \bar{p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{a}_{\theta, \varphi}(2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$p=4$ 时, $\bar{p}=2$, 则:

$$[\mathbf{B}_2]_{p \times p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$[\mathbf{T}_3]_{p \times \bar{p}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{a}_{\theta, \varphi}(2) & \bar{a}_{\theta, \varphi}(3) \\ 0 & \bar{a}_{\theta, \varphi}(2) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$p=5$ 时, $\bar{p}=4$, 则:

$$[\mathbf{B}_2]_{p \times p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_4 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$[\mathbf{T}_3]_{p \times \bar{p}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{\theta, \varphi}(2) & \bar{a}_{\theta, \varphi}(3) & 0 & \bar{a}_{\theta, \varphi}(4) \\ 0 & \bar{a}_{\theta, \varphi}(2) & \bar{a}_{\theta, \varphi}(3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{\theta, \varphi}(2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

将重构矩阵 $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$ 代入式(14)得:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta, \varphi, \mathbf{c}) &= \mathbf{C}\mathbf{a}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}\mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{B}\mathbf{a}_2(\theta, \varphi) \\ \mathbf{B}\mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{D}\mathbf{a}_2(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1[\mathbf{a}_1(\theta, \varphi)]\mathbf{d} + \mathbf{T}_2[\mathbf{a}_2(\theta, \varphi)]\mathbf{d} + \mathbf{T}_3[\mathbf{a}_2(\theta, \varphi)]\mathbf{b} \\ \mathbf{T}_2[\mathbf{a}_1(\theta, \varphi)]\mathbf{d} + \mathbf{T}_3[\mathbf{a}_1(\theta, \varphi)]\mathbf{b} + \mathbf{T}_1[\mathbf{a}_2(\theta, \varphi)]\mathbf{d} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1[\mathbf{a}_1(\theta, \varphi)] + \mathbf{T}_2[\mathbf{a}_2(\theta, \varphi)] & \mathbf{T}_3[\mathbf{a}_2(\theta, \varphi)] \\ \mathbf{T}_2[\mathbf{a}_1(\theta, \varphi)] + \mathbf{T}_1[\mathbf{a}_2(\theta, \varphi)] & \mathbf{T}_3[\mathbf{a}_1(\theta, \varphi)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{T}\mathbf{c} \quad (29)
 \end{aligned}$$

根据子空间理论可以得到:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}^H(\theta, \varphi, c) \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H \mathbf{a}(\theta, \varphi, c) &= \mathbf{a}^H(\theta_i, \varphi_i) \mathbf{C}^H \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H \mathbf{C} \mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i) \\
 &= 0, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (30)
 \end{aligned}$$

方位、俯仰参数和互耦系数的联合估计可以通过最小化下列代价函数得到:

$$[\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{c}] = \arg \min_{\theta, \varphi, c} \mathbf{a}^H(\theta, \varphi) \mathbf{C}^H \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H \mathbf{C} \mathbf{a}(\theta, \varphi) \quad (31)$$

如果直接对式(31)进行高维搜索求解,计算量非常庞大,而且初值与真实值偏离较远时,无法得到全局最优解.因此将式(29)代入式(30)有:

$$\mathbf{c}^H \mathbf{T}^H \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H \mathbf{T} \mathbf{c} = 0 \quad (32)$$

$$\mathbf{c}^H \mathbf{Q}(\theta_i, \varphi_i) \mathbf{c} = 0, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (33)$$

$$\mathbf{Q}(\theta, \varphi) = \mathbf{T}^H \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H \mathbf{T} \quad (34)$$

由于 $\mathbf{c} \neq 0$ (至少有一个互耦系数不为零),式(33)成立的充要条件是 $(p + \bar{p}) \times (p + \bar{p})$ 维矩阵 $\mathbf{Q}(\theta, \varphi)$ 满足 $\text{rank}(\mathbf{Q}(\theta, \varphi)) < p + \bar{p}$ ($\text{rank}(\cdot)$ 表示矩阵的秩).一般情况下, $\text{rank}(\mathbf{Q}(\theta, \varphi)) = p + \bar{p}$, 当且仅当 (θ, φ) 为信号的真实方位角和俯仰角时 $\mathbf{Q}(\theta, \varphi)$ 才是奇异阵.因此,方位角和俯仰角的估计等效于下列最小化问题:

$$(\hat{\theta}, \hat{\varphi}) = \arg \min_{(\theta, \varphi)} \{ \lambda_{\min}[\mathbf{Q}(\theta, \varphi)] \} \quad (35)$$

或

$$(\hat{\theta}, \hat{\varphi}) = \arg \min_{(\theta, \varphi)} \{ \det[\mathbf{Q}(\theta, \varphi)] \} \quad (36)$$

其中, $\lambda_{\min}[\cdot]$ 为求矩阵最小特征值的算子, $\det[\cdot]$ 为求矩阵行列式的算子.

再利用估计出的方位角和俯仰角 (θ, φ) 得到互耦系数:

$$\hat{c} = \mathbf{e}_{\min}[\mathbf{Q}(\hat{\theta}, \hat{\varphi})] \quad \mathbf{e}_{\min}(1) = 1 \quad (37)$$

其中, $\mathbf{e}_{\min}[\cdot]$ 为求矩阵最小特征值对应特征矢量的算子.

3.2 SAL 算法步骤

根据以上的分析过程,现将 L 型阵列的互耦自校正(SAL)算法总结如下:

- (1) 根据式(9)计算阵列协方差矩阵的估计值 $\hat{\mathbf{R}}$;
- (2) 计算 $\hat{\mathbf{R}}$ 的特征分解,构造噪声子空间 $\hat{\mathbf{E}}_N$;
- (3) 根据式(16)、(17)和(18)计算重构矩阵 \mathbf{T}_1 ;
- (4) 根据式(21)计算重构矩阵 \mathbf{T}_2 ;
- (5) 根据 L 型阵列结构、 p 和 \bar{p} 值计算重构矩阵 \mathbf{T}_3 ;
- (6) 根据式(29)计算重构矩阵 \mathbf{T} ;
- (7) 构造空间谱估计器

$$F(\theta, \varphi) = \frac{1}{\lambda_{\min}[\hat{\mathbf{Q}}(\theta, \varphi)]} \quad (38)$$

或

$$F(\theta, \varphi) = \frac{1}{\det[\hat{\mathbf{Q}}(\theta, \varphi)]} \quad (39)$$

(8) 根据式(38)或(39)搜索谱峰,得到方位角和俯仰角的估计值 $(\hat{\theta}, \hat{\varphi})$;

(9) 根据式(37)得到互耦系数的估计值 \hat{c} .

通过上述分析可以看出 L 型线阵的互耦不仅要考虑线阵内,还要考虑线阵间,这使得互耦的校正问题变得比较复杂.但线阵内是一均匀线阵,其互耦矩阵 \mathbf{D} 是一带状、对称的 Toeplitz 矩阵,线阵间互耦矩阵 \mathbf{B} 具有对称性.基于这些特点,通过分块并构造重构矩阵,将耦合的方位俯仰参数 (θ, φ) 和互耦系数矢量 \mathbf{c} “去耦”,即把联合估计问题化为先估计方位角和俯仰角 (θ, φ) ,再估计互耦系数矢量 \mathbf{c} 的级联估计问题.这样做的最大优点就是不需要求解高维的非线性优化问题,而只需进行二维(方位、俯仰)的参数搜索过程.

另外,当线阵内的互耦矩阵自由度 p 取 1 时, \mathbf{D} 为单位阵, \mathbf{B}_1 的第一行和第一列元素为 1,其余均为 0, \mathbf{B}_2 为零矩阵,对应无互耦情况.相应地 $\mathbf{T}[\mathbf{a}(\theta, \varphi)] = \mathbf{a}(\theta, \varphi)$, 矩阵 $\mathbf{Q}(\theta, \varphi)$ 退化为一常量,本文提出的修正算法退化为无误差时的二维 MUSIC 算法.

3.3 算法的模糊性分析

阵列流型是阵列对空域观察区内单位功率信源响应的集合,它与阵列几何结构和阵列各种电磁参数有着密切关系,具体算法对于这类参数的模糊估计是无能为力的,只有通过阵列结构的优化设计或对电磁参数进行某种数值约束^[11].理想均匀线阵的导向矢量是 Vander monde 矢量,它满足阵列流型无模糊的充要条件,即阵列间距小于等于半波长.互耦存在时,由于互耦参数与理想导向矢量耦合,阵列流型几何性质发生了变化,此时阵列流型保证无模糊的条件很难进行理论分析,下面给出经过大量仿真实验得出的一点结论:

假设均匀线阵不存在模糊(即阵元间距小于等于 $\lambda/2$),互耦自由度 p, \bar{p} 满足下列条件:

$$\begin{cases} p \leq \lceil M/2 \rceil \\ \bar{p} \leq \lceil M/2 \rceil \\ p + \bar{p} \leq \lceil (2M-1)/2 \rceil \\ p + \bar{p} < 2M-1-N \end{cases} \quad (40)$$

则二维角估计无模糊, $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整.另外,互耦自由度 p, \bar{p} 值的设定必须合理,因为 p, \bar{p} 的取值直接影响到重构矩阵 $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ 和 \mathbf{T}_3 的构造.

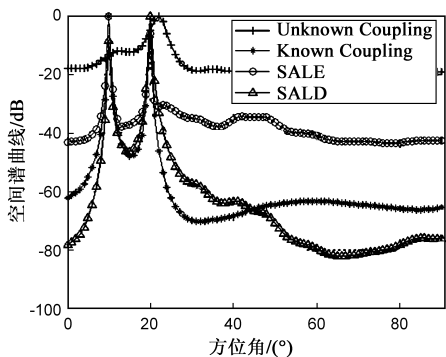
4 仿真试验

下面用仿真验证本文提出的 L 型阵列互耦自校正算法的有效性.设 L 型阵列如图 1 所示水平放置,两个均匀线阵阵元数均为 8,阵元间距都为半波长.线阵内互耦自由度为 3,互耦系数矢量 $\mathbf{d} = [1, 0.7821 +$

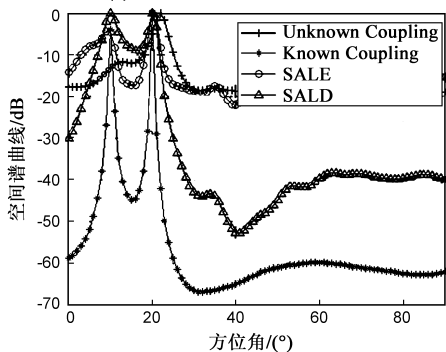
$0.2583i, -0.5476 + 0.2469i]^T$, 阵间互耦自由度为 1, 互耦系数矢量 $\mathbf{b} = [0.6524 - 0.2478i]^T$, 这里的互耦系数是随机选取的, 噪声为零均值的高斯白噪声.

仿真 1 互耦对 L 型阵列估计性能的影响

快拍数为 100, 信噪比为 10dB, 两个独立源方位角分别为 $20^\circ, 40^\circ$, 俯仰角分别为 $40^\circ, 40^\circ$. 图 2(a) 给出了互耦未知的 MUSIC 谱、互耦已知的 MUSIC 谱* 和本文提出的 SAL 算法(包括最小特征值法——SALE 和行列式法——SALD)计算出的谱. 图 2(b) 给出了只校正线阵内互耦时的 MUSIC 谱、互耦已知的 MUSIC 谱和本文提出的 SAL(SALE 和 SALD)算法计算出的谱, 此时, 式(29)中的 $\mathbf{T}_3[\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)]$ 是维数为 $M \times \bar{p}$ 的全零矩阵.



(a) 线阵内和线阵间互耦同时校正



(b) 只校正线阵内互耦

图2 方位角的音乐谱

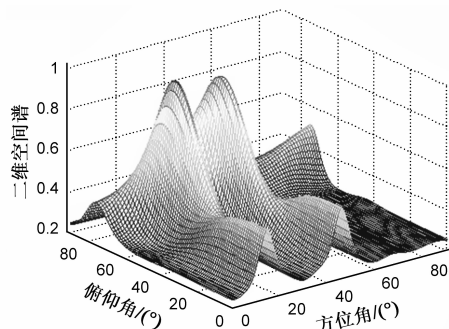
图 2(a) 表明未补偿 MUSIC 的估计性能很差; 本文提出的 SALE 和 SALD 算法均可以准确地估计出信源 DOA. 图 2(b) 表明当只对线阵内互耦进行校正时, 性能有所改善, 但效果不明显, 只有同时对线阵内和线阵间互耦进行校正时, MUSIC 算法性能才能大幅提高.

图 3 所示的二维 MUSIC 谱表明了未校正的二维 MUSIC 算法失效, 而本文所提的两种校正算法均能实现互耦条件下的二维方向估计, 且估计效果较好.

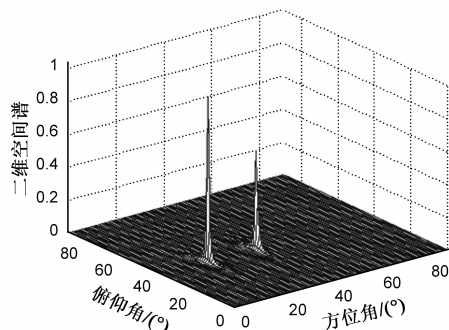
仿真 2 方位角估计性能随信噪比变化的曲线

本实验两信源方位角为 $10^\circ, 20^\circ$, 俯仰角均为 20° , 快拍数为 100, 对比 SALE、SALD 与偶已知的 MUSIC 算法随信噪比变化的统计性能, 每个信噪比做 100 次 Monte-Carlo 仿真实验. 图 4(a)、(b) 分别给出了 DOA 估计的成

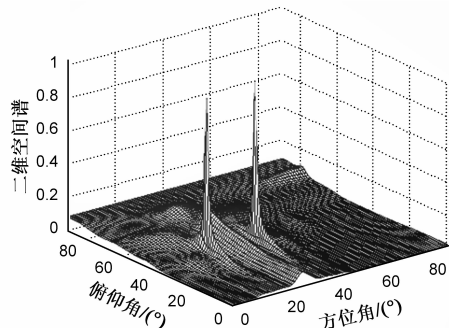
功概率和方位角为 20° 时均方根误差的比较曲线, 两个信号源方位角的估计值与真实值的误差均在 0.5° 内视为成功. 图 4(c) 还画出了 SALE 与相应 CRB 的关系曲线.



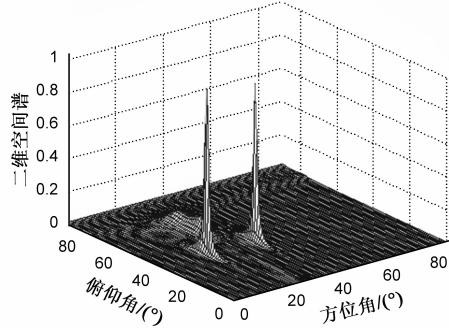
(a) 互耦未知的 MUSIC 谱



(b) 互耦已知的 MUSIC 谱



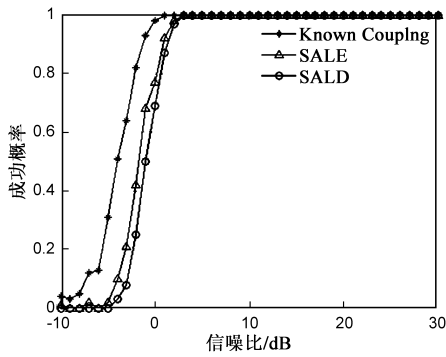
(c) SALE 算法



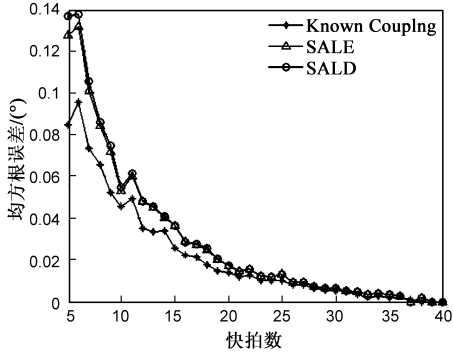
(d) SALD 算法

图3 二维 MUSIC 谱

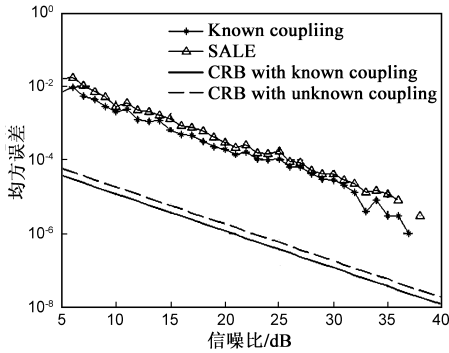
* 互耦已知的 MUSIC 谱为式(10)所绘出的谱, 这里假设互耦矩阵 \mathbf{C} 作为先验知识已知, 实际情况未知, 需要通过校正算法估计互耦矩阵 \mathbf{C} .



(a) 成功概率与信噪比的关系



(b) 均方根误差与信噪比的关系



(c) ALE与CRB的关系

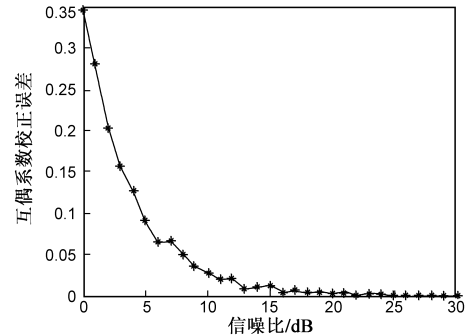
图4 方位角的性能比较

通过比较可以发现最小特征值法和行列式法的性能曲线几乎重合,性能非常接近.随着信噪比的增加,三者的曲线逐渐重合,性能趋于一致.本文所提的 SALE 算法比互耦已知和互耦未知时的 CRB 高三到四个数量级,且互耦未知时的 CRB 要略高于互耦已知时的 CRB.

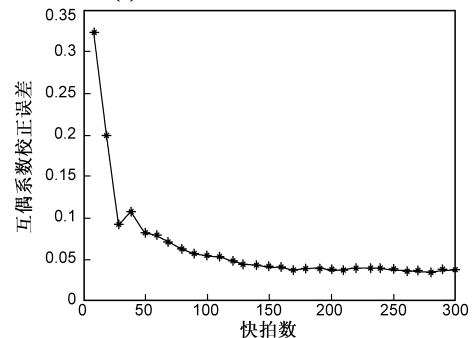
仿真3 互耦系数的估计性能

由于 SALE 和 SALD 的估计性能很接近,下表给出的是 SALE 法在不同信噪比条件下互耦系数估计的均值和均方根误差,表 1 和表 2 分别是线阵内和线阵间互耦系数的估计结果.图 5(a)给出了快拍数为 100 时互耦系数校正误差随信噪比变化的曲线;图 5(b)给出了信噪比为 10dB 时互耦系数校正误差随快拍数变化的曲线.互耦系数校正误差 ρ 定义为: $\rho = \|\hat{\mathbf{c}} - \mathbf{c}\|_F / \|\mathbf{c}\|_F$, 其中 $\|\cdot\|_F$ 表示求矩阵的 Frobenius 范数, \mathbf{c} , $\hat{\mathbf{c}}$ 分别为互耦系数矢量的估计值及真值,由于线阵内互耦系数的第一个值为 1,所以计算时未考虑该值的影响.

表 1 和表 2 说明了信噪比大于 15dB 时,线阵内和线阵间的互耦系数估计精度较高,性能较好;图 5 表明信噪比大于 15dB,快拍数大于 150 时,互耦系数校正误差较小,随着信噪比的增加,互耦系数校正误差逐渐趋于零,即互耦系数估计值逐渐趋于真值.



(a) 互耦系数校正误差与信噪比的关系



(b) 互耦系数校正误差与快拍数的关系

图5 互耦系数校正误差曲线

表 1 不同信噪比情况下线阵内互耦系数的估计结果

信噪比 (dB)		0	5	10	15	20	30
真实值 $d_2 = 0.7821 + 0.2583i$	实部均值	0.8594	0.8042	0.7926	0.7859	0.7834	0.7825
	实部 RMSE	0.0747	0.0216	0.0056	0.0035	0.0014	0.0009
	虚部均值	0.0689	0.2164	0.2465	0.2526	0.2567	0.2581
	虚部 RMSE	0.1820	0.0480	0.0148	0.0053	0.0020	0.0013
真实值 $d_3 = -0.5476 + 0.2469i$	实部均值	-0.6067	-0.5695	-0.5569	-0.5503	-0.5493	-0.5480
	实部 RMSE	0.0645	0.0289	0.0022	0.0088	0.0017	0.0017
	虚部均值	0.3664	0.2769	0.2545	0.2527	0.2474	0.2469
	虚部 RMSE	0.1296	0.0340	0.0121	0.0053	0.0014	0.0009

表 2 不同信噪比情况下线阵间互耦系数的估计结果

信 噪 比 (dB)		0	5	10	15	20	30
真实值 $b_1 = 0.6524 - 0.2478i$	实部均值	1.0416	0.7413	0.6896	0.6623	0.6577	0.6536
	实部 RMSE	0.3708	0.0943	0.0364	0.0147	0.0042	0.0017
	虚部均值	-0.6243	-0.3391	-0.2688	-0.2590	-0.2508	-0.2487
	虚部 RMSE	0.3525	0.1023	0.0311	0.0084	0.0034	0.0021

5 小结

通过理论分析可知互耦校正除了要考虑线阵内的互耦外,还必须考虑两个线阵间的互耦.本文提出的自校正算法利用线阵内互耦矩阵的带状、对称 Toeplitz 性及线阵间互耦矩阵的对称性,对互耦矩阵进行分块后构造重构矩阵,把相互耦合的 DOA 和互耦系数的联合估计问题转化为“去耦”的级联估计问题,避免了多维搜索带来的庞大运算量和迭代时无法保证全局收敛等缺点,从而实现了互耦条件下 L 型阵列的二维空间谱估计.理论分析和仿真结果均表明了本文提出的自校正算法对 L 型阵列互耦校正的有效性.

参考文献:

- [1] Ying bo HU, T K S, Donald D. Weiner. An L-shaped array for estimating 2-D directions of wave arrival[J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 1991, 39(2): 143 - 146.
- [2] J E Fernandez del Rio M F C-p. The matrix pencil method for two-dimensional direction of arrival estimation employing an L-shaped array[J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 1997, 45(11): 1693 - 1694.
- [3] Hua Y, Sarkar T K, Weiner D. L-shaped array for estimating 2-D directions of wave arrival[A]. Proceedings of the 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems, vol. 1[C]. Urbana, IL, USA, 1990. 390 - 393.
- [4] Benjamin Friedlander and Anthony J. Weiss. Direction finding in the presence of mutual coupling[J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 1991, 39(3): 273 - 284.
- [5] 高峰,刘其中,单润红,等.一种新型圆形智能天线阵互耦补偿研究[J].电子学报,2004,32(11):1871 - 1874.
Gao Feng, Liu Qi-zhong, Shan Run-hong, Xiao Liang-yong. Analysis of mutual coupling compensation of a novel smart antenna circular array[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(11):

1871 - 1874. (in Chinese)

- [6] 伍裕江,聂在平.一种新的互耦补偿方法及其理论分析[J].电子学报,2007,35(3):492 - 496.
WU Yu-jiang NIE Zai-ping. A new mutual coupling compensation method and its theoretical analysis[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(3): 492 - 496. (in Chinese)
- [7] T T Zhang, H T Hui. Direction of arrival estimation using ESPRIT with mutual coupling compensation[J]. IEE Proc-Sci Meas Technol Nov. 2004, 151(6): 476 - 478.
- [8] Fabrizio Sellone, Alberto Serra. An iterative algorithm for the compensation of Toeplitz mutual coupling in uniform and linear arrays[A]. Digital Signal Processing Workshop, 12th-Signal Processing Education Workshop, 4th[C]. Teton National Park, WY, 23 - 27 Sept, 2006. 438 - 443.
- [9] Min Lin, Luxi Yang. Blind calibration and DOA estimation with uniform circular arrays in the presence of mutual coupling[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2006, 5: 315 - 318.
- [10] Zhongfu Ye, Chao Liu. On the resiliency of MUSIC direction finding against antenna sensor coupling[J]. IEEE Trans on AP, Feb 2008, 56(2): 3741 - 380.
- [11] 王布宏,王永良,陈辉,陈旭.均匀线阵互耦条件下的鲁棒 DOA 估计及互耦自校正[J].中国科学 E 辑.技术科学,2004,34(2):229 - 240.

作者简介:

吴 彪 男,1984 年出生于湖北武汉,2007 年毕业于空军雷达学院,获工学学士学位,现为空军雷达学院雷达兵器运用实验室硕士研究生,研究方向为阵列信号处理. E-mail: air_wb@hotmail.com

陈 辉 男,1974 年出生于江苏启东,武汉雷达学院雷达兵器运用实验室副教授.曾获国家技术发明二等奖 1 项、省部级科技进步一等奖 1 项,出版学术专著 1 部,发表论文 40 余篇,收入 SCI、EI、ISTP 检索 20 多篇.主要研究领域为:空间谱估计、阵列信号处理等.

